Τρίτη 13/10/20 Μάθημα 2ο

Ασκ. 4

$x_i = \begin{cases} 1 & \text{, αν ένας φρουρός στέκεται στην πόρτα } i \\ 0 & \text{, αλλιώς.} \end{cases}$

$\min z = x_1 + \ldots + x_n$.

Κάθε δωμάτιο πρέπει να έχει τουλάχιστον ένα φρουρό

$x_1 + x_2 \geq 1$

$x_1 + x_3 \geq 1$

$x_2 + x_4 \geq 1$

$x_4 + x_5 \geq 1$

$x_3 + x_5 + x_6 + x_9 \geq 1$

$x_7 \geq 1$

$x_7 + x_8 \geq 1$

$x_2 + x_9 \geq 1$

Ασκ. 5

Έστω $x_{ijk}^{m} = 1$, αν στη θέση (i,j,k) μπει ο αριθμός m

$\min 0$

$x_{221}^{1} = 1$

$x_{224}^{3} = 1$

$x_{125}^{5} = 1$

$x_{326}^{7} = 1$

$x_{218}^{9} = 1$

Σε κάθε γραμμή κάθε αριθμός εμφανίζεται ακριβώς μια φορά

$\sum_{i=1}^{9} x_{ijk}^{m} = 1 \quad \forall j, k, m \in \{1, \ldots 9\}$

όμοια για στήλη και υποπίνακα

$$\sum_{j=1}^{9} x_{ijk}^{m} = 1 \quad \forall i,k,m \in \{1..9\}$$

$$\sum_{k=1}^{9} x_{ijk}^{m} = 1, \forall i,j,m \in \{1,..9\}$$

Ασκ. 6

Εστω x_i: αριθμος προϊοντων τυπου $i=1,..7$ που παραγονται
Επειδη αν παραχθει το προϊον 7 θα υπαρχει και εφαπαξ κοστος, απαιτειται μια μεταβλητη που να ελεγχει αν θα παραχθει το προϊον 7.

$z_7 = 1$, αν $x_7 \geq 1$
0, αλλιως

~~Απαιτειται~~: $z = 10x_1 + 22x_2 + 35x_3 + 19x_4 + 55x_5 + 10x_6 + 115x_7 - 2000z_7$
$x_7 \leq M z_7$.

Επειδη αν το προϊον 3 και το προϊον 4 παραχθουν, θα μειωθουν οι εργατοωρες, απαιτειται μια μεταβλητη που να ελεγχει αν θα συμβει κατι τετοιο.

$z_3 = \begin{cases} 1, & εαν\ x_3 \geq 1 \\ 0, & εαλλιως \end{cases}$ $\quad z_4 = \begin{cases} 1 & αν\ x_4 \geq 1 \\ 0, & αλλιως \end{cases}$

Αν παραχθει και το προϊον 3 και το 4 τοτε $z = z_3 \cdot z_4 = 1$
Αν τουλαχιστον ενα απο τα δυο δεν παραχθει $z = z_3 \cdot z_4 = 0$
Αρα $z = z_3 \cdot z_4 = \begin{cases} 1 & , αν\ x_3 \geq 1\ και\ x_4 \geq 1 \\ 0 & αλλιως \end{cases}$

Ο παραπανω τροπος ορισμου δε δινει γραμμικο περιορισμο ετσι οριζεται μια μεταβλητη $z \in \{0,1\}$ με τους περιορισμους $z \geq z_3 + z_4 - 1$, $z \leq \frac{z_3 + z_4}{2}$.

Αν $z_3 = z_4 = 0$ τοτε ο πρωτος δινει $-1 \leq z$ και ο δευτ. $z \leq 0$.
Αρα $z = 0$

Αν $z_3=0$, $z_4=1$ τοτε $z\geq 0$ κ $z\leq \frac{1}{2}$ $\Rightarrow z=0$

· αν $z_3=z_4=1$ $\Rightarrow z\geq 1$ κ $z\leq 1$ $\Rightarrow z=1$

Για να εξασφαλιστει οτι αν $x_3\geq 1$ τοτε $z_3=1$ και αν $x_4\geq 1$ τοτε $z_4=1$: $x_3\leq M_3 z_3$

$x_4\leq M_4 z_4$.

Απο τον περιορισμό σε ανθρωποώρες έχουμε

$$x_1+2x_2+3.7x_3+2.4x_4+4.5x_5+0.7x_6+9.5x_7\leq 720-75z$$

Ασκ. 7)

Έστω $x_j=\begin{cases}1, & \text{αν το τηλέφωνο εγκατασταθεί στην τοποθεσία } j=1..8\\ 0, & \text{αλλιως.}\end{cases}$

$\min x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8$

$x_1+x_2\geq 1$ οδος A

$x_2+x_3\geq 1$ οδος B

$x_4+x_5\geq 1$ οδος C

$x_7+x_8\geq 1$ οδος D

$x_6+x_7\geq 1$ » E

$x_2+x_6\geq 1$ » F

$x_1+x_6\geq 1$ » G

$x_4+x_7\geq 1$ » H

$x_2+x_4\geq 1$ » I

$x_5+x_8\geq 1$ » J

$x_3+x_5\geq 1$ » K

Ασκ. 8)

Έστω X_1: Τα λεπτά κλήσεων στην εταιρεία A
X_2: Τα λεπτά κλήσεων στην εταιρεία B
X_3: Τα λεπτά κλήσεων στην » Γ.

Επειδή κάθε εταιρεία, αν χρησιμοποιηθεί έχει ένα σταθερό πάγιο

$$y_1 = \begin{cases} 1, & \text{αν } X_1 > 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} 1, & \text{αν } X_2 > 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$y_3 = \begin{cases} 1, & \text{αν } X_3 > 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$X_1 \le M_1 Y_1$
$X_2 \le M_2 Y_2$
$X_3 \le M_3 Y_3$

$\min 0,25X_1 + 0.21X_2 + 0.22X_3 + 16Y_1 + 15Y_2 + 18Y_3$

Συνολικά τα λεπτά ομιλίας θα είναι 200: $X_1 + X_2 + X_3 = 200$

Άρα προκύπτει ότι $M_1 = M_2 = M_3 = 200$

Στο LINDO η εντολή GIN(·) ορίζει τη μεταβλητή ως ακέραια
η INT(·) ορίζει ~~...~~ τη μεταβλητή ως 0, 1

$$\max\ 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4 + 11x_5 + 19x_6$$
$$5x_1 + 7x_2 + 3x_4 + 4x_3 + 4x_5 + 6x_6 \leq 14$$
$$x_j = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, j = 1, \dots 6$$

Πλήρη απαρίθμηση : n δυαδικές μεταβλητές: 2^n συνδυασμούς
Έστω ότι μπορούμε να κάνουμε 1δισ. υπολ. το δευτερόλεπτο

n αριθμ. μεταβλητών	χρονος επίλυσης
30	1sec
40	17 λεπτά
50	11,6 μέρες
60	31 χρονια
70	31.000 χρονια

▲ Ένα σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται κυρτό αν για x_1 και $x_2 \in S$ τοτε $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S$ για κάθε $\lambda \in [0,1]$

▲ Έστω ένα σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Ένα σημείο x του $\mathbb{R}^n$ είναι κυρτός συνδυασμός σημείων του S αν υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων $\{x_1, \dots x_k\}$ που όλα να ανήκουν στο S και ένα σύνολο μη αρνητικών πραγματικών αριθμών $\{\lambda_1, \dots \lambda_k\}$ έτσι ώστε

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \quad \text{με} \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

▲ Affine σύνολο:
Ένα σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται affine αν για x_1 και $x_2 \in S$ τοτε $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S$ για κάθε $\lambda \in S$

<u>Παράδειγμα:</u> σύνολο λύσεων του συστήματος γραμμικών εξισώσεων $\{x \mid Ax = b\}$

Αντίστροφα, κάθε affine σύνολο μπορεί να εκφραστεί ως λύση (σύνολο λύσεων) ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων).

<u>Γραμμικός Συνδυασμός:</u>

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j \quad \text{με } \lambda_j \in \mathbb{R},\ j = 1, \dots k.$$

▶ Έστω $S \subset \mathbb{R}^n$ ένα κυρτό σύνολο. Ένα σημείο $x \in S$ ένα ακρότατο σημείο (κορυφή) του S (διαφορετικών από το x): $\nexists x_1, x_2 \in S \setminus \{x\}$, $\lambda \in (0,1)$ s.t $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$.

<u>Παραδείγματα κυρτών συνόλων:</u>

1) $S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 - x_3 = 4\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
$S = \{x : p^t x = a\}$ λέγεται υπερεπίπεδο στον $\mathbb{R}^n$, όπου p είναι μη μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ και $a \in \mathbb{R}$.

2) $S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 4\} \subseteq \mathbb{R}^3$
Τα σημεία αυτά δημιουργούν το ημιεπίπεδο
Το σύνολο $S = \{x : p^t x \leq a\} \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι κυρτό σύνολο

3) $S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 4,\ x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 6\} \subseteq \mathbb{R}^3$
Τομή δύο ημιεπιπέδων.

Αν S_1 και S_2 κυρτά σύνολα του $\mathbb{R}^n$ τότε:
1) $S_1 \cap S_2$ είναι κυρτό
2) $\{x_1 + x_2 : x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$ είναι κυρτό.
3) $\{x_1 - x_2 : x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$ είναι κυρτό.

▶ Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Η κυρτή θήκη /περίγραμμα (convex hull) του S, συμβολίζεται ως $conv(S)$ είναι το σύνολο όλων των κυρτών συνδυασμών των σημείων του S.
Με άλλα λόγια, $x \in conv(S)$ αν το x μπορεί να γραφεί ως: $x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j$ $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$, $\lambda_j \geq 0$, $j = 1, \ldots k$

k είναι ένας θετικός ακέραιος και $x_1, \ldots x_k \in S$

Πρόταση:
Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Τότε $conv(S)$ είναι το μικρότερο κυρτό σύνολο που περιέχει το S. $conv(S)$ είναι η τομή όλων των κυρτών συνόλων που περιέχουν το S.

Ορισμός:
Το κυρτό περίγραμμα ενός πεπερασμένου αριθμού σημείων $x_1, \ldots, x_{k+1} \in \mathbb{R}^n$. λέγεται πολύτοπο

$P' = conv\{x^k : k = 1, \ldots p\} :=$
$= \left\{\sum_{k=1}^{p} \lambda_k . x^k : \sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1, \lambda_k \geq 0, \forall k\right\}$ για $x^1, \ldots, x^p \in \mathbb{R}^n$

Αν $x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_{k+1} - x_1$ είναι γρ. ανεξάρτητα τότε $conv(x_1, \ldots x_{k+1})$ λέγεται simplex με κορυφές τα $x_1, \ldots, x_{k+1}$.

Πρόταση:

Αν το P' είναι πολύτοπο τότε είναι και πολύεδρο.

Θεώρημα Minkowski

Αν $P \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι πολύεδρο και φραγμένο τότε το P είναι πολύτοπο δηλ P έχει ένα πεπερασμένο σύνολο X κορυφών και $P = conv(X)$

Εναλλακτικές μοντελοποιήσεις προβλημάτων ακέραιου προγραμματισμού

Έστω το ακόλουθο πρόβλημα μεικτού ακέραιου προγραμματισμού

$\max c_x^T x + c_y^T y$

$Ax + By < b$, A, B πίνακες.

$x \in Z^n$

Έστω η εφικτή περιοχή $F_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+p} : Ax + By \leq b, x \in Z^n\}$

Αν αγνοήσουμε τους περιορισμούς $x \in Z^n$ το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν τους υπόλοιπους περιορισμούς είναι πολύεδρο

$P_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+p} : Ax + By \leq b\}$

$F = P \cap (Z^n \times R^p$

Μοντελοποίηση/διατύπωση συνόλου εφικτής περιοχής προβλημάτων μικτού ακέραιου προγραμματισμού

Ένα πολύεδρο $P \subseteq \mathbb{R}^{n+p}$ λέγεται μοντελοποίηση του συνόλου $F \subseteq Z^n \times \mathbb{R}^p$ αν $P \cap Z^n \times R^p = F$.

Μια διατύπωση του προβλήματος μικτού ακέραιου προγραμματισμού είναι οποιαδήποτε διατύπωση του συνόλου της εφικτής του περιοχής

Αν δύο μοντελοποιήσεις P_1, P_2 του συνόλου των εφικτών λύσεων F ενός προβλήματος ακέραιου ή μικτού ακέραιου προγραμματισμού ικανοποιούν $P_2 \subset P_1$, λέμε ότι η P_2 είναι πιο σφικτή (tigher) μοντελοποίηση από το P_1

Ιδανική μοντελοποίηση:
Αν μια μοντελοποίηση P του συνόλου των εφικτών λύσεων F ικανοποιεί $P = \mathrm{conv}(F)$ τότε P λέγεται ιδανική μοντελοποίηση

Έστω ένα πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού

Α.Π.
$$z = \max_x c^T x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$
$$x_j \in \mathbb{Z} \ (j = 1, \ldots n).$$

Ονομάζουμε χαλάρωση του Α.Π το
Γ.Π.
$$w = \max_x c^T \cdot x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Αν το πρόβλημα Γ.Π είναι μη εφικτό, τότε το πρόβλημα Α.Π είναι μη εφικτό.
Αν το πρόβλημα Α.Π είναι εφικτό τότε $z < w$

Οι ιδανικές μοντελοποιήσεις λύνονται με τη χαλάρωση του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού
Έστω Α.Π
$$z = \max c^T x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$
$$x_j \in \mathbb{Z} \ (j = 1, \ldots n)$$

να είναι ένα πρόβλημα ακέραιου που δίνεται με ιδανική μοντελοποίηση $P = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ και x^* είναι η βέλτιστη λύση της χαλάρωσης του προβλήματος του γραμμικού προγραμματισμού

ΓΠ $\quad \omega = \max c^T x$

$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Τότε x^* είναι επίσης βέλτιστη λύση του Α.Π

Total Unimodularity

Ένας πίνακας A $m \times n$ ονομάζεται totally unimodular (TU) αν η ορίζουσα κάθε τετραγωνικού υποπίνακα του A είναι ίση με 0, 1 ή −1

Συνεπώς, κάθε στοιχείο ενός totally unimodular πίνακα είναι ίσο με 0, 1 ή −1.

Οι προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1/ Ο A είναι TU

2/ Ο Αντίστροφος του A είναι TU

3/ Ο (A, I) είναι TU

4/ Ο πίνακας που προκύπτει απαλοίφοντας μια μοναδιαία γραμμή (στήλη) του A είναι TU

5/ Ο πίνακας που προκύπτει πολ/ντας μια γραμμή (στήλη) του A με −1 είναι TU

6/ ο πίνακας που προκύπτει αλλάζοντας αμοιβαία δύο γραμμές (στήλες) του A είναι TU

7/ ο πίνακας που προκύπτει επαναλαμβάνοντας μια γραμμή (στήλη) του A είναι TU

Ακέραιο Πολύεδρο

Ένα μη κενό πολύεδρο $P \subseteq \mathbb{R}^n_+$ είναι ακέραιο αν.ν όλες οι κορυφές του είναι ακέραια.

Ακέραιο σημείο ενός πολυέδρου ονομάζεται ένα σημείο του πολυέδρου το οποίο δεν μπορεί να εκφραστεί ως κυρτός συνδυασμός 2 άλλων σημείων του πολυέδρου.

Έστω το πρόβλημα P.

$$\max cx$$
$$\text{s.t. } Ax \le b$$
$$x \ge 0$$

, όλα τα στοιχεία του b ακέραιοι

Πρόταση:
Αν ο A είναι TU τότε το πολύεδρο των εφικτών λύσεων του προβλήματος P είναι ακέραιο για όλα τα $b \in \mathbb{Z}^n$ για τα οποία δεν είναι κενό

Πρόταση: Αν ο $(0,1,-1)$ πίνακας A δεν έχει πάνω από δύο μη μηδενικά στοιχεία σε κάθε στήλη και αν $\sum a_{ij} = 0$ εφόσον η στήλη j περιέχει δύο μη μηδενικούς συντελεστές, τότε ο A είναι TU

Πρόταση:
Έστω ο $(0,1,-1)$ πίνακας A με όχι περισσότερα από δύο μη μηδενικά στοιχεία σε κάθε στήλη. Τότε ο A είναι TU αν.ν οι γραμμές του A μπορούν να χωριστούν σε δύο υποσύνολα S_1 και S_2 έτσι ώστε αν μια στήλη περιέχει δύο μη μηδενικά στοιχεία, οι ακόλουθες προτάσεις ισχύουν:

1) Αν και τα δυο μη μηδενικά στοιχεια έχουν το ίδιο πρόσημο τοτε το ένα είναι σε γραμμή που περιέχεται στο S_1 και το άλλο σε γραμμή που περιέχεται στο S_2.

2) Αν τα δύο μη μηδενικά στοιχεια έχουν αντίθετο πρόσημο τότε και τα δυο ανήκουν σε γραμμές που περιέχονται στο ίδιο υποσύνολο.

Σημασία της ΤU:

Το σύνολο των εφικτών λύσεων ενός προβλήματος για τον πίνακα του οποιου αυτή η ιδιότητα ισχύει είναι ακέραιο πολύεδρο ⟹ η simplex θα βρεί το ακραίο σημειο που είναι και βελτιστο και αφού το πολύεδρο είναι ακέραιο τότε και η λύση είναι ακέραια
Συνεπως η λυση θα ικανοποιεί τους περιορισμούς ακεραιότητας του αρχικού προβλήματος και θα είναι βέλτιστη και για αυτό.

Άρα εύρεση βέλτιστης λύσης του ακέρ. προβλ. χρησιμοποιώντας αλγόριθμο γραμ. προγραμ. αποφεύγοντας καποιον απο τους εξειδικευμένους αλγόριθμους ακέραιου προγραμματισμού

Π.χ)
Μετά απο την αγορά δυο καινούργιων μηχανών, πρέπει να αποφασιστεί σε ποιον απο τους δυο διαθέσιμους χώρους θα πρέπει να τοποθετηθούν ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κοστος λειτουργίας και μεταφορας. Αν η πρωτη μηχανή τοποθετηθεί στην πρώτη(δεύτερη) θεση το κοστος είναι 10, (9), ενώ για την δευτερη μηχανή ειναι 8 και 11 αντίστοιχα.

$x_{ij} = 1$, αν η μηχανή i τοποθετηθεί στην θέση j, $i,j = 1,2$

0 αλλιώς.

$$\min\ 10x_{11} + 9x_{12} + 8x_{21} + 11x_{22}$$

st.

$$x_{11} + x_{12} = 1$$
$$x_{21} + x_{22} = 1$$
$$x_{11} + x_{21} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$